2. cvičení - teorie

Matematická indukce

Slouží k dokázání tvrzení, která mají platit pro všechna přirozená (popřípadě celá či racionální) čísla. Sestává ze dvou částí.

1. ověřit začátek - ověříme, že tvrzení platí pro $n = 1$, případně $n = 0$, nebo jiné, podle toho, od kterého čísla má trvzení platit

2. n-tý krok - ověřit, že když výrok platí pro n, pak z toho plyne, že platí i pro $n + 1$. Využijeme zde takzvaný *indukční předpoklad*, tedy budeme předpokládat, že tvrzení již platí pro n kroků, a z toho chceme odvodit, že bude platit i pro $n + 1$ krok.

Vizte vzorové řešení příkladu 1.

Výroky

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \implies B$	$A \iff B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulková metoda: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/ portal/logika/?page=pravdivost

Kvantifikátory: $\forall$ = pro každé, $\exists$ = existuje

Jak znegovat výrok s kvantifikátory:

1) Místo $\forall$ napíši $\exists$ a naopak

2) Zneguji výrok, který je za všemi těmi kvantifikátory podle následujících pravidel:

$\neg(A \wedge B)$ je $\neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B)$ je $\neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \implies B)$ je $A \wedge \neg B$

$\neg(A \iff B)$ je $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

Jak ověřovat pravdivost výroků:

Pokud jde o výrok $\forall x \in$ množina něco platí, tak máme dvě varianty:

1) vybereme libovolné x a snažíme se zajistit, aby platil zbytek (pokud se nám to povede, pak je výrok pravdivý) *(např. Př. 3a)*

2) zkusíme najít protipříklad - tj. x, pro které nemůže být výrok splněn *(např. Př. 3b)*

Pokud se snažíme dokázat výrok ve tvaru $\exists x \in$ množina, máme opět dvě možnosti:

1) ukázat, že výrok pro nějaké x platí (např. vyřešit rovnici apod.) *(např. Př. 3d)*

2) ukázat, že to pro žádné x platit nemůže *(např. Př. 3f)*

Množiny

Mějme libovolné množiny A, B. Pak definujme následující pojmy.

$x \in A \cup B$, pokud $x \in A \vee x \in B$

$x \in A \cap B$, pokud $x \in A \wedge x \in B$

$x \in A \setminus B$, pokud $x \in A \wedge x \notin B$

$A \subset B$, pokud $\forall x \colon x \in A \implies x \in B$

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (symetrická diference)

Jak se dokazuje rovnost množin A a B:

1) dokážu, že $x \in A \iff x \in B$
2) dokážu, že $A \subset B$ a že $A \supset B$

Infimum a supremum

Definice. Celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ je *dělitelné číslem* $a \in \mathbb{Z}$, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ t.ž. $n = a \cdot k$.

Definice. Číslo $G \in \mathbb{R}$ nazveme *supremum množiny* M (značíme $\sup M$), jestliže platí:

- $\forall x \in M : x \leq G$ (G je horní závora M),
- $\forall \overline{G} < G \; \exists x \in M : x > \overline{G}$ (G je nejmenší horní závora M).

Pokud existuje číslo patřící do množiny M, které splňuje první podmínku, nazveme ho *maximum množiny* M (značíme $\max M$). Druhá podmínka pak platí triviálně, tj. $\sup M = \max M$.

Definice. Číslo $g \in \mathbb{R}$ nazveme *infimum množiny* M (značíme $\inf M$), jestliže platí:

- $\forall x \in M : x \geq g$ (g je dolní závora M),
- $\forall \overline{g} > g \; \exists x \in M : x < \overline{g}$ (g je největší dolní závora M).

Pokud existuje číslo patřící do množiny M, které splňuje první podmínku, nazveme ho *minimum množiny* M (značíme $\min M$). Druhá podmínka pak platí triviálně, tj. $\inf M = \min M$.

Axiom infima. Buď $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ zdola, omezená množina. Pak má množina M právě jedno infimum.

Věta 1.2 (o supremu)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.

Věta 1.4 (Archimédova vlastnost)**.** Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Věta 1.6 (o hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** Buďte $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Potom existuje $r \in \mathbb{Q}$ splňující $a < r < b$, a $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ splňující $a < s < b$.